El rincón de la Ciencia I.S.S.N.: 1579-1149 nº 63 (diciembre-2012)

# EL NÚMERO DE ORO. La divina proporción

(RC-145)

**Marina Waigant**

Ahora más que nunca el mundo en el que vivimos se levanta sobre los números, algunos de los cuales tienen incluso nombre propio: el número *pi* (π), el número *e*… De todo conjunto de números notables hay uno especialmente interesante: 1,6180339887… Resulta curioso saber que ésta modesta cifra ha fascinado a lo largo de la historia a muchas más mentes brillantes que *pi* y *e*. Durante siglos ha recibido denominaciones de lo más llamativas: número de oro, posición trascendental, número divino, divina proporción, etc. El número de oro, que se representa con la letra griega ϕ (phi, en honor al escultor griego Phidias), habita un territorio de relaciones y propiedades numéricas increíbles, pero también de conexiones insospechadas entre la naturaleza y las creaciones humanas. Este informe pretende ser una guía de viaje al país del número divino, donde trataremos de descubrir sus bellezas y saber cómo apreciarlas.

Ahora bien, al hablar del número áureo nos surgen ciertas preguntas: ¿Qué tienen en común fenómenos naturales tan distintos como la disposición de las semillas de una flor de girasol, la elegante espiral dibujada por las conchas de algunos moluscos y los brazos de las galaxias que nos acoge, la Vía Láctea? ¿Qué pauta geométrica de insuperable armonía se esconde en las obras de grandes artistas y arquitectos como Leonardo Da Vinci? Aunque nos parezca increíble, la respuesta a estos dos interrogantes es un simple número, una cifra de apariencia humilde, conocida desde la antigüedad, cuya continua aparición en toda clase de manifestaciones naturales y artísticas ha merecido tales apelativos como “divina proporción”, “numero de oro” o “proporción áurea”. Reproducir esa cifra en letra impresa nos resultaría literalmente imposible, y no porque sea excesivamente grande -de hecho es apenas mayor que 1-, sino porque está compuesta por un número infinito de dígitos que, además no siguen una pauta alguna. Descartada su reproducción literal, podemos ayudarnos de la notación aritmética para conocerla. El número de oro se torna así algo mucho más manejable: $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Se trata de un número que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como "unidad" sino como relación o proporción entre partes de un cuerpo o entre cuerpos, que encontramos en la naturaleza en la morfología de diversos elementos tales como caracoles, nervaduras de las hojas de algunos árboles, el grosor de las ramas, proporciones humanas**,** etc. Asimismo, se atribuye un carácter estético especial a los objetos que siguen la razón áurea, así como una importancia mística. A lo largo de la historia, se le ha atribuido importancia en diversas obras de arquitectura y otras artes.

El número áureo es la división armónica de un segmento en media y extrema razón. Es decir, que el segmento menor es al segmento mayor, como este es a la totalidad. De esta manera se establece una relación de tamaños con la misma proporcionalidad entre el todo dividido en mayor y menor. Esta proporción o forma de seleccionar proporcionalmente una línea se llama proporción áurea.

El descubrimiento de este valor se debe a los pitagóricos. Adoptaron la estrella pentagonal (Véase fig. 1) como símbolo de su escuela llegando a llevarla tatuada sobre la palma de la mano, en el lugar donde se reunían reinaba el lema "*No entre nadie sin saber geometría*". Era, según la tradición, el símbolo de los seguidores de Pitágoras.

La estrella pentagonal o pentágono estrellado es una estrella simétrica de cinco puntas que se inscribe en un pentágono, donde cada punta coincide con el vértice del pentágono[1].

---

[1] Miriam Liborio, Alejandra infante "*Matemática para ver*". 1ª ed. Córdoba: Advocatus 2010.

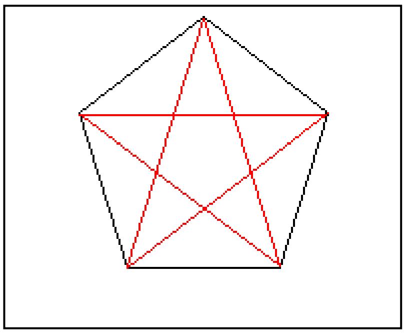

Fig. 1: Estrella pentagonal

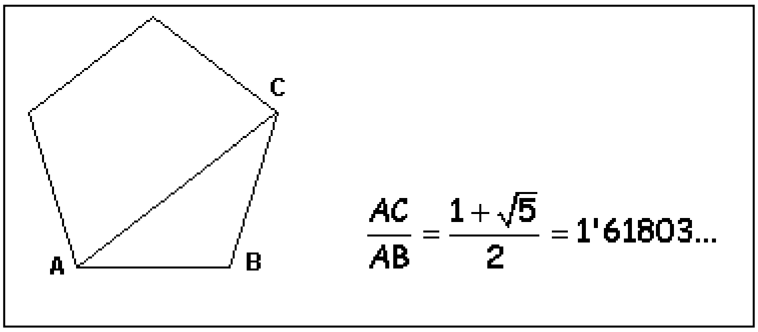


Fig. 2: Relación entre una diagonal y un lado del pentágono

Los pitagóricos definían los números como expresiones de proporciones (y no como unidades, tal y como hoy es común), creían que la realidad es numérica y que esta proporción expresaba una verdad fundamental acerca de la existencia. La perfección numérica, para ellos, dependía de los divisores del número. Calcularon la relación que existía entre una diagonal y un lado del pentágono (Véase fig. 2) y encontraron que era siempre La misma. Lo llamaron razón áurea.

A lo largo de la historia, desde pensadores hasta matemáticos o teólogos han meditado sobre la misteriosa relación que se establece entre el número áureo y la naturaleza de la realidad. Esta curiosa relación matemática, ha mostrado una propensión a aparecer en una variedad de lugares de lo más sorprendentes. Como por ejemplo, en la formación de los flósculos de los girasoles y en la disposición de los pétalos de algunas plantas como los cactus o rosas. También rige las dimensiones y formas de galaxias que contienen billones de estrellas y define la dinámica de los agujeros negros. Otro ejemplo es el del corazón de la manzana, en cuyo interior hay una curiosa estrella de proporciones áureas.

El rectángulo de muchos objetos nos resulta especialmente armonioso hasta tal punto que las tarjetas de crédito tienen las dimensiones de esos rectángulos especiales ya que tienen unas proporciones determinadas y una extraña propiedad a la que se le atribuye el número áureo.

No solo aparece en la naturaleza sino que esta proporción puede aparecer en el ser humano, por eso muchos matemáticos y científicos han desarrollado teorías sobre las modelos o la gente que nos parece atractiva, es porque en la estructura de su cuerpo aparece la divina proporción en muchas de las partes de nuestro organismo.

Los griegos utilizaban los números para buscar con ellos proporciones armoniosas en las esculturas humanas. A estas proporciones ideales las llamaban canon. Uno de los primeros cánones fue el del escultor griego Lisipo que consideraba que la estatura completa de un hombre era de ocho cabezas: la cabeza más el cuerpo que debía medir siete cabezas.

Las proporciones humanas fueron objeto sistemático de estudio por escultores, pintores, matemáticos y arquitectos. Es sobre todo en el Renacimiento, el hombre pretendía abarcar todas las disciplinas, cuando se incrementa este estudio sobre la belleza del cuerpo humano.

El *hombre ideal* representa las relaciones aproximadas normales en el cuerpo humano de una persona adulta, usadas desde la Grecia clásica como canon artístico para representar a la persona ideal. A continuación exponemos las proporciones de manera clara[2]:

*Altura total= brazada (distancia entre la punta de los dedos con los brazos abiertos)= 8 palmos= 6 pies= 8 caras= 1,618*altura ombligo (distancia del suelo al ombligo)*

Como vemos, aparece finalmente la relación 1,618, una buena aproximación a $\phi$.

La sucesión de Fibonacci

La historia de la matemática es a veces sorprendente, y desde luego siempre inesperada. El viejo número áureo, tan geométrico, emparentó varios siglos después con unas fracciones que surgieron de una sucesión puramente aritmética. El artífice del matrimonio fue el más destacado matemático de la Edad Media, Leonardo Pisano, más conocido como Fibonacci.

[2] Fernando Corbalán “La proporción áurea”. EDITEC

La sucesión de Fibonacci es una secuencia de números enteros descubierta por matemáticos hindúes hacia el año 1135 y descrita por primera vez en Europa gracias a Fibonacci.

La sucesión se describe de la forma: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,… Y su fórmula general es una función recursiva de término general:

$$F(n)\begin{cases}0 & si\ n=0\\ 1 & si\ n=1\\ f(n-1)+f(n-2) & si\ n>1\end{cases}$$

A esta fórmula se llega de forma sencilla mediante el método de diferencias divididas. Si consideramos la expresión F(n) = F(n-1)+F(n-2) y realizamos el cambio de variable x=F(n-1) llegamos a la expresión $x^2$-x-1=0, cuyas soluciones son: $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Es decir, las soluciones son el número áureo y su conjugado. Hay que tener en cuenta que el número áureo es un número irracional por serlo la raíz de cinco. A este número áureo lo podemos considerar como uno de los valores propios de nuestra fórmula recursiva de Fibonacci, junto con su conjugado. Teniendo en cuenta que dichos valores propios son reales y distintos; y que nuestra forma recursiva la podemos considerar como una ecuación en diferencias, podemos averiguar la expresión de F(n) de forma explícita mediante(n) = a Fi^n + b fi^n , para averiguar a y b basta sustituir n = 0 y n= 2, obteniendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, Al resolverlo nos queda que el término general de la sucesión de Fibonacci, en forma explícita es: *F(n)* = $\frac{\phi^2-(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$.

LEONARDO PISANO, FIBONACCI (1170-1250)

Leonardo Pisano nació en Pisa en 1170. Su apodo denota su origen familiar, pues Fibonacci significa simplemente “hijo de Bonacci”. Sin embargo, el nombre es de origen moderno, no hay pruebas de que fuera conocido como Fibonacci en su época.

Se inició en las matemáticas desde la contabilidad, pues su padre era un mercader italiano con relaciones comerciales internacionales. Pronto Leonardo mostró interés por las matemáticas que iba mucho más allá de sus aplicaciones mercantiles. Los viajes comerciales al norte de África le proporcionaron la oportunidad de aprender de maestros musulmanes que le transmitieron la matemática árabe. Así conoció el sistema de numeración indo-arábigo y comprendió de inmediato sus enormes ventajas. Se convirtió en su más acérrimo valedor en Europa, donde intentó divulgarlo. A él le debemos su introducción en nuestra cultura

En una sucesión con tantas peculiaridades como la de Fibonacci la variedad de manifestaciones es inacabable. Por ejemplo podemos observar que los términos $a_n$ de la sucesión de Fibonacci que son primos solo pueden ocupar lugares $n$ que sean primos, mientras que lo contrario no es cierto. Por ejemplo el término n=19 (un lugar primo), es $a_n$= 4,181= 37*113 (por tanto no primo).

NUMEROS PRIMOS

Un número cuyos únicos divisores son él mismo y la unidad se llama primo. Si tiene divisores diferentes de ellos dos se llama compuesto. Son primos 7, 13 o 23; compuestos lo son 6 (que tiene a 2 y 3 por divisores) o 32 (con 2, 4, 8 o 16). Cualquier número se puede expresar como producto de números primos; de ahí su nombre.

Jugar con los números primos en Fibonacci nos muestra también una conjetura todavía no demostrada: la sucesión de Fibonacci contiene infinitos números primos sin embargo a día de hoy, nadie sabe si esta conjetura es verdadera o falsa.

El mundo de los fractales es profundo y complejo. Las manifestaciones de $\phi$ en la dimensión fractal continúan mucho más allá, hacia terrenos insospechados. Lo que nos interesa de su relación es que nos permite constatar que un número anciano y venerable, que empezó su andadura matemática hace más de veinte siglos, puede conectar perfectamente con los conocimientos matemáticos de vanguardia. El numero $\phi$ no es una antigüedad guardada en el baúl de los recuerdos, continua con vida renovada e imparable.

## Bibliografía:


• Fernando Corbalán; "*La proporción áurea*". Editec 2010

• Miriam Liborio, Alejandra infante; "*Matemática para ver".* 1ª ed. Córdoba: Advocatus 2010.

• Silvia V. Altman, Claudia R. Comparatore, Liliana E. Kurzrok; "*Números y sucesiones*". 2da ed. Buenos Aires, Longseller, 2005.

• Pacioli, L. "*La divina proporción*", Introduccion A.M Gonzales. Madrid, Akal, 1987.