

¿Nos engañan los bancos? De los préstamos y las matemáticas

(rc-143)

Juan Carlos Sanz-Martín¹. Premio MENSA-Omnia a la divulgación científica. Miembro de la Asociación Española de Comunicación Científica



Quienes no estudian ciencias creen que las matemáticas son una pesada mochila de la que conviene librarse cuanto antes. Así, temas como las progresiones geométricas, las funciones exponencial o logarítmica, etc., las juzgan cosas de los de ciencias. Cuantos así opinan se equivocan porque, más pronto que tarde, tendrán que hacer las cuentas para declarar impuestos o acudir a un banco para abrir un depósito o solicitar un préstamo.

En este artículo demuestro que no pocos bancos tratan de hacernos trampas, y cobrarnos intereses por unos cuantos días de más (seis días en un año bisiesto como 2012), al amortizar los préstamos, porque la mayor parte de las personas no aprecian la utilidad de las matemáticas en la vida corriente.

^[1] El autor desea expresar un cariñoso agradecimiento a Antonio Fraguas, "Forges", por haberle permitido utilizar la viñeta que ilustra este artículo.

El francés es el tipo más común de préstamo

Hay distintos tipos de préstamos en función de cómo se amortiza el capital prestado y cómo se pagan los intereses que cobra el banco. El más frecuente es el francés, cuyas cuotas, constantes,^[2] se pagan periódicamente por vencido y comprenden tanto los intereses devengados durante el periodo entre dos pagos sucesivos como una parte para devolver el capital prestado.

No hay que dejarse amilanar por la palabrería anterior. Uno acude al contrato que ha pactado con el banco y estudia qué ecuaciones se aplican (creedme, es lo mejor). Verá unas cuantas, una de las cuales suele tener esta pinta en la mayor parte de las ocasiones:

$$Q = \frac{C \cdot R}{1 - (1 + R)^{-m}} \quad [0]$$

donde:

Q = importe total de cada pago.

C = capital pendiente de amortizar.

R = tipo de interés efectivo pactado (expresado en tanto por uno).

m = número de cuotas pendientes de pagar.

Si llamamos C_0 al capital que nos prestaron inicialmente y sabemos que N es el número total de cuotas para devolverlo por completo, entonces, por recurrencia, podemos construir una ecuación muy útil para saber el importe del pago p -ésimo:

$$Q = \frac{C_{p-1} \cdot R}{1 - (1 + R)^{-(N-p+1)}} \quad [1]$$

donde: $1 \leq p \leq N$

Por definición, la cuota en el sistema francés de amortización comprende dos sumandos: uno, para amortizar parte del capital prestado, y otro, para pagar los intereses que nos cobra el banco. Esto se expresa así:

$$Q = I_p + A_p \quad [2]$$

donde:

I_p = parte para pagar los intereses en la cuota p -ésima.

A_p = parte para amortizar el capital en la cuota p -ésima.

Si volvemos al contrato de préstamo pactado con el banco encontraremos otra ecuación, que sirve para calcular la parte destinada al pago de intereses en cada cuota. No debe sorprendernos ver la clásica formulación del interés simple.^[3]

$$I_p = C_{p-1} \cdot R \cdot T \quad [3]$$

^[2] Varían cuando lo hace la tasa de interés, y siempre que así esté estipulado.

^[3] Expresión, que, además, se ha empleado para deducir la propia ecuación [0].

donde:

I_p = parte para pagar intereses en la cuota p -ésima.

C_{p-1} = capital pendiente de amortizar.

R = tipo de interés efectivo pactado (expresado en tanto por uno).

T = tiempo transcurrido entre dos pagos periódicos sucesivos.

Acabamos de conocer al “asesino” en esta novela de suspense. Os presento a T , el tiempo transcurrido entre dos pagos periódicos sucesivos. Por otro lado, a partir de ahora hay que abrocharse los cinturones, porque vamos a pilotar un poco de álgebra.

Si en la ecuación [2] despejamos A_p , habiendo sustituido las expresiones [1] y [3] y sacado factor común, obtenemos:

$$A_p = C_{p-1} \cdot R \cdot \left[\frac{1}{1 - (1 + R)^{-(N-p+1)}} - T \right]$$

que, con una sencilla operación, se transforma en:

$$A_p = \frac{C_{p-1} \cdot R}{1 - (1 + R)^{-(N-p+1)}} \cdot \left\{ 1 - T \cdot \left[1 - (1 - R)^{-(N-p+1)} \right] \right\}$$

Recordando ahora [1], entonces la ecuación anterior da esta otra:

$$A_p = Q \cdot \left[1 - T + T \cdot (1 + R)^{-(N-p+1)} \right] \quad [4]$$

De la definición del préstamo francés se deduce que la suma de todas y cada una de las partes amortizativas es igual al capital inicialmente prestado, lo que se expresa así:

$$C_0 = \sum_{p=1}^N A_p \quad [5]$$

En consecuencia (sustituyendo [4] en [5]):

$$\begin{aligned} C_0 &= Q \cdot \sum_{p=1}^N \left[1 - T + T \cdot (1 + R)^{-(N-p+1)} \right] \\ &= Q \left[\sum_{p=1}^N (1 - T) + T \cdot \sum_{p=1}^N (1 + R)^{-(N-p+1)} \right] \end{aligned} \quad [6]$$

Fijémonos en la segunda suma que aparece entre corchetes. ¿Qué es?

Obviamente es la suma de una progresión geométrica, cuyo resultado se conoce bien:

$$\sum_{p=1}^N (1 + R)^{-(N-p+1)} = \frac{1 - (1 + R)^{-N}}{R}$$

Así, la ecuación [6] adquiere esta forma:

$$C_0 = Q \cdot \sum_{p=1}^N (1-T) + Q \cdot T \cdot \frac{1-(1+R)^{-N}}{R} \quad [7]$$

Examinemos ahora el producto que aparece en el segundo miembro de esta ecuación:

$$Q \cdot \frac{1-(1+R)^{-N}}{R} \quad [8]$$

¿De qué se trata?

Para saberlo basta recordar la ecuación [1], particularizada para el primer pago (es decir para $p = 1$):

$$Q = \frac{C_0 \cdot R}{1-(1+R)^{-N}}$$

Si aquí despejamos C_0 , vemos que el resultado coincide con [8].

Entonces, [7] queda de esta guisa:

$$C_0 = Q \cdot \sum_{p=1}^N (1-T) + T \cdot C_0$$

Igualados, término a término, ambos miembros de esta ecuación, se deduce que se cumple sí y sólo sí $T = 1$!

El "asesino" acaba de delatarse. ¡Es la unidad!

Conclusiones

Si en el contrato bancario de amortización de un préstamo el montante de las sucesivas cuotas se ha pactado que venga dado por la ecuación:

$$Q = \frac{C \cdot R}{1-(1+R)^{-m}}$$

entonces, matemáticamente, caben diversas deducciones:

1. El método de amortización es el francés.
2. Q es el importe total de la cuota, pagadera en cada vencimiento.
3. C es el capital pendiente de amortizar.
4. R es el tipo de interés efectivo pactado (expresado en tanto por uno).
5. m es el número de cuotas pendientes de pagar.

6. Entre dos pagos sucesivos el tiempo que transcurre SIEMPRE es la unidad, y no más, como quieren hacernos creer algunos bancos, ¡que no nos engañen! Esto significa que la parte correspondiente a los intereses de la cuota p -ésima debiera expresarse así (ver [3]):

$$I_p = C_{p-1} \cdot R$$

Aún no hemos terminado

Al hablar de tasa de interés los bancos suelen referirse al llamado interés nominal anual, habitualmente expresado en tanto por ciento. La relación entre las tasas de interés efectivo, R , y de interés nominal anual, que he simbolizado como %, es la siguiente:

$$R = \frac{\%}{100 \cdot k}$$

donde k indica el número de cuotas que se pagan al año.

k	Si las cuotas son:
1	Anuales
2	Semestrales
3	Cuatrimestrales
4	Trimestrales
6	Bimestrales
12	Mensuales

De ahí que el número total de plazos, N , venga dado por:

$$N = a \cdot k$$

donde a es el número de años (sin duda, no tiene por qué ser un número natural).

Como los pagos suelen ser mensuales, a la sazón $k = 12$ y la ecuación [0] adquiere este aspecto, acaso más frecuente:

$$Q = \frac{C \cdot \left(\frac{\%}{1.200} \right)}{1 - \left[1 + \left(\frac{\%}{1.200} \right) \right]^{-m}} \quad [9]$$

donde:

Q = importe total de la cuota.

C = capital pendiente de amortizar.

% = tipo de interés nominal anual pactado (expresado en tanto por ciento).

m = número de cuotas mensuales pendientes de pagar.

Y la ecuación [4], este otro:

$$I = \frac{C \cdot \%}{1.200} \cdot T \quad [10]$$

donde:

I = parte destinada al pago de los intereses en la cuota mensual total.

C = capital pendiente de amortizar.

$\%$ = tipo de interés nominal anual pactado (expresado en tanto por ciento).

T = número de meses efectivamente transcurridos entre el pago de dos cuotas sucesivas, que, como sabemos, tiene que ser SIEMPRE igual a la unidad.

Hay veces que, para despistarnos, en los contratos bancarios la ecuación anterior la redactan de este modo:

$$I = \frac{C \cdot \%}{36.000} \cdot D$$

donde:

D = número de días efectivamente transcurridos entre dos pagos sucesivos.

Pero adviértase que esa ecuación puede reescribirse sencillamente así.

$$I = \frac{C \cdot \%}{1.200} \cdot \left(\frac{D}{30} \right) \quad [11]$$

En estos casos los bancos tratan de confundirnos (lamentablemente, el Banco de España también suele actuar de cómplice) diciendo que, aunque la base de cálculo de intereses es el "año comercial", de 360 días, no obstante, *están autorizados* para tomar 31 como valor de D cuando los meses vienen con este número de días, lo que implica que al final del año el banco cobre 5 ó 6 días más de intereses. Pero, las matemáticas dictan otra cosa.

En efecto. Como (*cfr.* [10] y [11]):

$$\left(\frac{D}{30} \right) = T = 1$$

se deduce que $D = 30$.

Es decir, el número de días efectivamente transcurridos entre el pago de dos cuotas mensuales sucesivas tiene SIEMPRE que considerarse igual a treinta. O sea que si el contrato pactado con el banco estipula la ecuación [0] (o la [9], que es equivalente) para determinar el importe total de cada una de las sucesivas

cuotas, entonces ¡¡todos los meses son de 30 días, ni uno más y ni uno menos!! De lo contrario las ecuaciones no se satisfacen. Como veis conocer matemáticas podría dificultar que algunos bancos nos timen.^[4]

[4] Fuera ya de la argumentación estrictamente matemática, un abogado con experiencia en derecho mercantil os dirá que los contratos de préstamo son de adhesión (predispuestos, muy normalizados y con una notable asimetría de poder contractual), de manera que cuando existen cláusulas oscuras, ambiguas o contradictorias debe aplicarse un principio jurídico denominado *contra proferentem*, que implicaría una *interpretatio pro consumatore*. Pero esto ya es otra historia.